توابعی امید ریاضی ۱

در این مبحث، قضایایی عنوان می‌شود که به آن‌ها می‌گویند امید ریاضی سازه‌ای می‌شود:

$$E(aX+b) = aE(X)+b \Longrightarrow (E(aX)=aE(X),\ E(b)=b)$$

مثال: در تابع احتمال زیر مطلوبست محاسبه $E(X-1)^2$

X	-1	0	1	2
$f_X(x)$	0.1	0.1	0.5	0.3

$$\rightarrow E(X) = -1(0.1)+0(0.1)+1(0.5)+2(0.3)$$

$$E(X) = -0.1+0.5+0.6 = 1$$

$$E(X^2) = (-1)^2(0.1)+0+(1)^2(0.5)+(2)^2(0.3) = 0.1+0.5+1.2 = 1.8$$

$$E(X-1)^2 = E(X^2-2X+1) = E(X^2)-2E(X)+1 = 1.8-2(1)+1 = 0.8$$

مثال: در تابع چگالی احتمال X زیر مطلوبست محاسبه $E(5X-4)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x} & 0<x<4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \Rightarrow E(X) = \int_0^4 x\left(\frac{3}{16}\sqrt{x}\right)dx = \frac{3}{16}\int_0^4 x^{3/2}dx$$

$$\frac{3}{16}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{5/2}\right)\Big|_0^4 = \frac{3}{16}\left(\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)_0^4 = \frac{3}{16}\times\frac{2}{5}\times 32 = \frac{12}{5}$$

$$\rightarrow E(5X-4) = 5E(X)-4 = 5(12/5)-4 = 8$$

اگر $g(x)$ و $h(x)$ توابعی از متغیر تصادفی X با شرط امید ریاضی آنها وجود اگر، a و b اعداد ثابتی باشند:

$$E(g(x)\pm h(x)) = E(g(x))\pm E(h(x))$$

$$E(ag(x)+bh(x)) = aE(g(x))+bE(h(x))$$

اگر $g(X,Y)$ و $h(X,Y)$ توابعی از متغیرهای تصادفی X و Y با شرط امید ریاضی آنها وجود اگر، a و b اعداد ثابتی باشند، آنگاه:

$$E(g(x,y)\pm h(x,y)) = E(g(x,y))\pm E(h(x,y))$$

$$E(ag(X,Y))+E(bh(X,Y)) = aE(g(X,Y))+bE(h(X,Y))$$

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با شرط آنکه

$$E(X\pm Y) = E(X)\pm E(Y)$$

مثال: دو تاس قرمز و سبز را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده عدد روی تاس قرمز و متغیر تصادفی Y

Scanned with CamScanner

مثال: دو تاس سبز و قرمز را می‌اندازیم. امید ریاضی $(X+Y)$ را محاسبه کنید.

چون X و Y مستقل هستند بنابراین می‌توان گفت:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$E(X) = \sum_x x \cdot f_X(x) \quad , \quad E(Y) = \sum_y y \cdot f_Y(y)$$

$$E(X) = 1/6(1+2+3+4+5+6) \qquad E(Y) = 1/6(1+2+3+4+5+6)$$
$$= 21/5 = 3.5 \qquad = 21/5 = 3.5$$

حال داریم:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$
$$= 7$$

به روش دیگری می‌توان گفت:

$X+Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_{X+Y}(x+y)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

$$E(X+Y) = \sum_{x=2}^{12} 2(1/36) + 3(2/36) + \cdots + 12(1/36) = 7$$

اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$
$$\hookrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

مثال: رابطه فوق الذکر را در مثال تابع چگالی احتمال توام X و Y ذیل اثبات نمایید:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 16y/x^3 & x>2 \ , \ 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 16y/x^3 \, dy = (8y^2/x^3)\Big|_0^1 = 8/x^3 \qquad x>2$$

$$f_Y(y) = \int_2^{+\infty} 16y/x^3 \, dx = (-8y/x^2)\Big|_2^{+\infty} = 2y \qquad 0<y<1$$

$E(X) = 4$

$$E(X) = \int_2^{+\infty} x \times 8/x^3 \, dx = \int_2^{+\infty} 8/x^2 \, dx = (-8/x)\Big|_2^{-\infty} =$$

$$E(Y) = 2\int_0^1 y^2 \, dy = 2(1/3 y^3)\Big|_0^1 = 2/3$$

$$E(XY) = 16\int_2^{+\infty} 1/x^2 \int_0^1 y^2 \, dy \, dx = 16\int_2^{+\infty} 1/x^2 (1/3 y^3)\Big|_0^1 dx = 16/3 \int_2^{+\infty} 1/x^2 \, dx =$$

$$16/3(-1/x)\Big|_2^{+\infty} = 16/3 \times 1/2 = 8/3$$

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$
$$8/3 = 2/3 \times 4 = 8/3$$

Scanned with CamScanner

مثال: اگر X و Y دارای توزیع احتمال توام زیر باشند مطلوبست محاسبه:

الف) $E(X)$ ب) $E(Y)$ ج) $E(XY)$

x / y	-1	0	1
-1	0	$1/4$	0
0	$1/4$	0	$1/4$
1	0	$1/4$	0

الف) $E(X) = \sum_x x \cdot f_x(x) = -1(1/4) + 0 + 1(1/4) = 0$

ب) $E(Y) = \sum_y y \cdot f_Y(y) = -1(1/4) + 0 + 1(1/4) = 0$

$E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f_{X,Y}(x,y) = (-1)(-1)(0) + 0 + (-1)(1)(0) + 0 + 0 + 0 + (1)(-1)(0) + (1)(0)(1/4) + (1)(1)(0) = 0$

$E(XY) = 0$

بنابراین می‌توان گفت:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

ولی X و Y مستقل نیستند زیرا $f_{X,Y}(-1,-1) = 0$ ولی $f_X(-1) \times f_Y(-1) = 1/4 \times 1/4 = 1/16$

امیدهای ریاضی خاص:

میانگین متغیر تصادفی X همان امید ریاضی آن است ← $\mu = \mu_X = E(X)$

ویژگی‌های میانگین:

$E(aX+b) = aE(X)+b = a\mu_X + b$

$E(aX) = aE(X) = \mu_{aX} = a\mu_X$

$E(b) = b = \mu_b = b$

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum g(x) \cdot f_X(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

واریانس متغیر تصادفی X ($Var(X) = \sigma^2 = \sigma_X^2$):

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2 = E(X-\mu_X)^2 \rightarrow \begin{cases} \sum_x (x-\mu_X)^2 f(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)\,dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

میانگین می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد ولی واریانس هیچ‌گاه منفی نیست.

Scanned with CamScanner

واریانس متغیر تصادفی X براساس رابطه ذیل بدست می‌آید :

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E((X-\mu)^2) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

ویژگی‌های واریانس :

۱- واریانس هیچگاه منفی نمی‌شود

$$Var(X) \geq 0$$

۲- پراکندگی چند عدد نسبت به واریانس آن صفر است

$$Var(b) = 0$$

$$Var(aX+b) = Var(aX) = a^2 Var(X) \quad , \quad Var(aX) = a^2 Var(X)$$

مثال : اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد دختر در خانواده‌ای سه نفره باشد که بطور تصادفی از بین ۴ دختر و ۳ پسر انتخاب می‌شوند. واریانس و انحراف از معیار متغیر تصادفی X را حساب کنید :

x_i	0	1	2	3
$Pr(X=x_i)$	$1/35$	$12/35$	$18/35$	$4/35$

$$E(X) = (0 \times 1/35) + (1 \times 12/35) + (2 \times 18/35) + (3 \times 4/35) = 12/7$$

$$E(X^2) = (0^2 \times 1/35) + (1^2 \times 12/35) + (2^2 \times 18/35) + (3^2 \times 4/35) = 24/7$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 27/4 - (12/7)^2 = 24/49 \Rightarrow \sigma_X = 2\sqrt{6}/7$$

مثال : ۳ سکه سالم و همگنی که روی وجه آن اعداد یک تا ۴ حک شده است را دو بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را تعداد یک‌های رو شده در دو پرتاب تعریف می‌کنیم. میانگین و واریانس متغیر تصادفی X را بیابید :

X : تعداد یک‌های رو شده در دو پرتاب			
x_i	0 (اولی یک نباشد و دومی هم نباشد)	1 (اولی یک و دومی غیر یک یا عکس)	2 (اولی و دومی یک)
$Pr(X=x_i)$	$3/4 \times 3/4 = 9/16$	$3/4 \times 1/4 + 1/4 \times 3/4 = 6/16$	$1/4 \times 1/4 = 1/16$

$$E(X) = (0 \times 9/16) + (1 \times 6/16) + (2 \times 1/16) = 8/16 = 1/2$$

$$E(X^2) = (0^2 \times 9/16) + (1^2 \times 6/16) + (2^2 \times 1/16) = 6/16 \times 4/16 = 10/16$$

$$Var(X) = 5/8 - (1/2)^2 = \frac{5-2}{8} = 3/8$$

Scanned with CamScanner

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد مطلوبست واریانس و انحراف استاندارد متغیر تصادفی (2X+1)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{26}x^2 & 0<x<3\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$Var(-2X+1)=4Var(X)$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$E(X)=\int x f(x)dx=\int_0^3 x\left(\frac{3}{26}x^2\right)dx=\frac{3}{26}\left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3=\frac{3}{26}\times\frac{1}{4}(3^4)=2.3$$

$$E(X^2)=\int x^2 f(x)dx=\int_0^3 x^2\left(\frac{3}{26}x^2\right)dx=\frac{3}{26}\left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3=\frac{3}{26}\times\frac{1}{5}(3^5)=5.6$$

$$Var(X)=5.6-(2.3)^2=0.17 \Rightarrow Var(-2X+1)=4Var(X)=0.68$$

کوواریانس X و Y:

گاه $g(X,Y)$ را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$g(X,Y)=(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$$

آنگاه امید ریاضی این تابع $E(g(X,Y))$ را کوواریانس X و Y می‌گویند و با نمادهای σ_{XY} یا $Cov(X,Y)$ نشان می‌دهند:

$$\sigma_{XY}=Cov(X,Y)=E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$$

کوواریانس X و Y رابطه بین دو متغیر تصادفی X و Y را نشان می‌دهد. اگر X و Y هم جهت باشند (هر دو با هم افزایش و کاهش یابند) آنگاه کوواریانس X و Y مثبت است اگر X و Y در خلاف جهت هم باشند آنگاه کوواریانس X و Y منفی می‌باشد. اگر X و Y مستقل از هم باشند آنگاه $Cov(X,Y)=0$ می‌باشد.

اگر X و Y گسسته باشند

$$\sigma_{XY}=\sum_x\sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)f_{X,Y}(x,y)$$

اگر X و Y پیوسته باشند

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

Scanned with CamScanner

کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y بصورت ذیل بدست می‌آید:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E(XY) - E(X).E(Y)$$

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع ذیل باشد

x	-1	0	1
$f(x)$	1/4	1/2	1/4

و متغیر تصادفی Y را بصورت $Y = X^2$ تعریف کنیم مطلوبست:

الف) محاسبه $Cov(X,Y)$ ب) آیا متغیرهای X و Y مستقل اند؟

ج) $Var(2X - Y + 1)$ را بیابید

x / y	-1	0	1	$f(y)$
0	0	1/2	0	1/2
1	1/4	0	1/4	1/2
$f(x)$	1/4	1/2	1/4	

الف): $E(X) = \sum_x x.f(x) = (-1 \times 1/4) + \dots + (1 \times 1/4)$

$\Rightarrow E(X) = 0$

$E(Y) = \sum_y y.f(y) = (0 \times 1/2) + (1 \times 1/2) = 1/2$

$E(XY) = \sum_x \sum_y x.y\, f_{X,Y}(x,y) = 0 + 0 + \dots + (1 \times -1 \times 1/4) + 0 + (1 \times 1 \times 1/4) = 0$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 0$

ب) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y) = f_{X,Y}(-1,0) = f_X(-1).f_Y(0)$

$= 0 \neq 1/4 \cdot 1/2 = 2$ چون رابطه برقرار نیست پس مستقل نیستند

$Var(2X - Y + 1) = 4Var(X) + Var(Y) - 4Cov(X,Y) =$

$\begin{cases} Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 & E(X^2) = (-1^2 \times 1/4 + 0 + 1^2 \times 1/4) = 1/2 = 2 \\ Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 2 & E(Y^2) = (0^2 \times 1/2) + (1^2 \times 1/2) = 1/2 = 2 \end{cases}$ $Var(X) = 1/2 - (0)^2 = 1/2$, $Var(Y) = 1/2 - (1/2)^2 = 1/4$

$Var(2X - Y + 1) = 4(1/2) + 1/4 - 4(0) = 9/4$

Scanned with CamScanner

مثال : اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توام ذیل باشند :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<y \ , \ 0<y<1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) σ_{XY} را محاسبه کنید ب) آیا X و Y مستقل هستند؟

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^y 2x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\tfrac{2}{2}x^2\right)\Big|_0^y dy = \int_0^1 y^2\,dy = \left(\tfrac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^y 2y\,dx\,dy = \int_0^1 y\,(2x)\Big|_0^y dy = \int_0^1 y(2y)\,dy = \left(\tfrac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \tfrac{2}{3}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y 2xy\,dx\,dy = \int_0^1 y\left(x^2\right)\Big|_0^y dy = \int_0^1 y(y^2)\,dy = \tfrac{1}{4}\left(y^4\right)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{4}$$

$$\sigma_{XY} = \tfrac{1}{4} - \left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{36}$$

ب) چون $\sigma_{XY} \neq 0$ می‌باشد پس X و Y مستقل نیستند.

خواص واریانس و کوواریانس : (a و b و c اعداد ثابت و X و Y متغیرهای تصادفی اند)

$$Var(c) = 0 \quad , \quad Var(aX+b) = a^2\,Var(X)$$

$$Cov(X,Y) = Var(X) \quad , \quad Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

$$Cov(X,c) = 0 \quad Cov(aX+b, cY+d) = ac\,Cov(X,Y)$$

$$Var(aX+bY+c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\,Cov(X,Y)$$

اگر X و Y مستقل باشند

$$Var(aX+bY+c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$$

اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی باشند

$$Cov(aX_1+bX_2, Y) = a\,Cov(X_1,Y) + b\,Cov(X_2,Y)$$

Scanned with CamScanner

مثال: اگر X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال توام زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{96}xy & 0<x<4 \quad 1<y<5\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

مطلوب محاسبه: الف) σ_{xy} ب) آیا X و Y مستقل الاثر هستند.

$$E(x)=\frac{1}{96}\int_1^5 y\int_0^4 x^2\,dx\,dy=\frac{1}{96}\int_1^5 y\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4 dy$$

$$=\frac{1}{96}\times\frac{64}{3}\int_1^5 y\,dy=\frac{64}{96\times3}\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^5=\frac{64}{96\times3}\left(25/2-1/2\right)$$

$$\frac{\overset{8}{\cancel{64}}\times\overset{1}{\cancel{12}}}{\underset{8}{\cancel{96}}\times3}=8/3$$

$$E(y)=\frac{1}{96}\int_0^4 x\int_1^5 y^2\,dy\,dx=\frac{1}{96}\int_0^4 x\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_1^5 dx=\frac{1}{96}\int_0^4 x\left(125/3-1/3\right)$$

$$\frac{124}{96\times3}\int_0^4 x\,dx=\frac{124}{96\times3}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^4=\frac{\overset{31}{\cancel{124}}}{\underset{3}{\cancel{96}}\times3}\times\overset{1}{\cancel{8}}=\frac{31}{9}$$

$$E(xy)=\frac{1}{96}\int_0^4\int_1^5 x^2y^2\,dy\,dx=\frac{1}{96}\int_0^4 x^2\int_1^5 y^2\,dy\,dx$$

$$\frac{1}{96}\int_0^4 x^2\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_1^5 dx=\frac{124}{96\times3}\int_0^4 x^2\,dx=\frac{124}{96\times3}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4$$

$$\frac{\overset{31}{\cancel{124}}}{\underset{3}{\cancel{96}}\times3}\times\frac{\overset{64}{\cancel{256}}}{3}=\frac{248}{27}$$

$$\sigma_{xy}=\frac{248}{27}-\left(8/3\times\frac{31}{9}\right)=0$$

پس متغیرهای x و y مستقل الاثر هستند.

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

ضریب همبستگی :

گاهی اوقات خواص کوواریانس آن اندازه‌گیری دو متغیرهای X و Y سنجش میزان رابطه لذا

دو متغیر تصادفی X و Y بااحتی از بعضی استفاده نمود که واحد اندازه‌گیری بسته نداشته باشد . برای این منظور ضریب

همبستگی تعریف می‌شود :

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، ضریب همبستگی بین X و Y را با نماد $\rho(X,Y)$ یا ρ نشان داده و براساس رابطه ذیل

محاسبه می‌نمایند :

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

ضریب همبستگی دو متغیر X و Y میزان رابطه خطی دو متغیر تصادفی X و Y را می‌سنجد . اگر $\rho = 0$ باشد نمی‌توان گفت که این متغیرها

مستقل‌اند بنابراین لذا بهتر آن بیان شود که متغیرهای X و Y ناهمبسته‌اند (دلیل می‌تواند این باشد که اگر X و Y دو متغیر تصادفی

مستقل باشند آن‌گاه $Cov(X,Y) = 0$ می‌باشد ولی عکس این مطلب همانند نیست یعنی اگر $Cov(X,Y) = 0$

باشد آن‌گاه دلیلی ندارد که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند).

فرض کنید a و b اعداد ثابت و X و Y هم متغیرهای تصادفی باشند در این صورت :

الف) $\rho(aX+b, cY+d) = \pm \rho(X,Y)$

ب) همواره داریم $-1 \le \rho \le 1$

ج) اگر $Y = aX+b$ و $a > 0$ باشد آن‌گاه : $\rho = +1$

د) اگر $Y = aX+b$ ، $a < 0$ باشد آن‌گاه $\rho = -1$

هـ) اگر X و Y مستقل باشند آن‌گاه $\rho = 0$ (لذا بهتر آن بگوییم ناهمبسته‌اند)

مثال : فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

اگر $Y=X^2$ باشد $\rho(X,Y)$ ، $\rho(X+1,2Y-1)$ را محاسبه کنید

$$E(X)=\int_0^1 x\,dx=(\tfrac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\tfrac{1}{2}$$

$$E(Y)=E(X^2)=\int_0^1 x^2\,dx=(\tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\tfrac{1}{3}$$

$$E(XY)=E(X^3)=\int_0^1 x^3\,dx=(\tfrac{1}{4}x^4)\Big|_0^1=\tfrac{1}{4}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$$

$$=\tfrac{1}{4}-(\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}=\frac{3-2}{12}=\tfrac{1}{12}$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\tfrac{1}{3}-(\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\tfrac{1}{12}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=E(X^4)-E^2(X^2)$$

$$E(X^4)=\int_0^1 x^4\,dx=(\tfrac{1}{5}x^5)\Big|_0^1=\tfrac{1}{5}$$

$$\hookrightarrow Var(Y)=\tfrac{1}{5}-(\tfrac{1}{3})^2=\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{9}=\frac{9-5}{45}=\tfrac{4}{45}$$

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var\cdot Var(Y)}}=\frac{\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{12}\times\frac{4}{45}}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}=\sqrt{15}/4$$

$$\rho(X+1,2Y-1)=\rho(X,Y)=\sqrt{15}/4$$

مثال: جعبه‌ای شامل 3 توپ سفید، 2 توپ قرمز و 2 توپ سیاه است. از این جعبه ۲ تصادف ۲ توپ یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب کرده و متغیرهای X و Y را بصورت ذیل تعریف می‌کنیم:

X = تعداد توپ‌های سفید مشاهده شده

Y = تعداد توپ‌های قرمز مشاهده شده

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

الف) تابع احتمال توام X و Y را به دست آورید

ب) ضریب همبستگی X و Y ، $E(Y|X=x)$ را محاسبه کنید

$S_X = \{0,1,2\}$ $S_Y = \{0,1,2\}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{2}{2-x-y}}{\binom{7}{2}}$$

$$f_{X,Y}(0,0) = P_r(X=0, Y=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = 1/21$$

$$f_{X,Y}(1,0) = P_r(X=1, Y=0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21}$$

y \ x	0	1	2	$P_{Y(y)}$
0	$1/21$	$6/21$	$3/21$	$10/21$
1	$4/21$	$6/21$	0	$10/21$
2	$1/21$	0	0	$1/21$
$P_{X(x)}$	$6/21$	$12/21$	$3/21$	

$E(X) = (0 \times 6/21) + (1 \times 12/21) + (2 \times 3/21) = 18/21 = 6/7$

$E(Y) = (0 \times 10/21) + (1 \times 10/21) + (2 \times 1/21) = 12/21 = 4/7$

$E(X^2) = (0^2 \times 6/21) + (1^2 \times 12/21) + (2^2 \times 3/21) = 24/21 = 8/7$

$E(Y^2) = (0^2 \times 10/21) + (1^2 \times 10/21) + (2^2 \times 1/21) = 14/21 = 2/3$

$Var(X) = 8/7 - (6/7)^2 = 20/7$ $Var(Y) = 2/3 - (4/7)^2 = 50/147$

$E(XY) = (0 \times 0 \times 1/21) + (0 \times 1 \times 4/21) + \dots + (2 \times 2 \times 0) = 2/7$

$Cov(X,Y) = 2/7 - (6/7 \times 4/7) = -10/49$

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

$$\rho(x,y) = \frac{-10/49}{\sqrt{20/49 \times 50/147}} = -0.548$$

$E(y \mid x=x) = ?$

ازبحث توزیع احتمال شرطی به یاد داریم که :

$$f_{y/x}(y/x=x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)} \Rightarrow x=0 \Rightarrow f_{y/x}(y/x=0) = \frac{f_{x,y}(0,y)}{f_x(0)}$$

$f_x(0) = 6/21$

$$\Rightarrow 21/6 \times f_{x,y}(0,y) \Rightarrow$$

y	0	1	2
$f_{y/x}(y/0)$	$\underbrace{21/6 \times 1/21}_{1/6}$	$\underbrace{21/6 \times 4/21}_{4/6}$	$\underbrace{21/6 \times 1/21}_{1/6}$

$\Rightarrow E(Y/X=0) = 1$

برای $x=1 \Rightarrow f_x(1)\ 12/21 \rightarrow$

y	0	1	2
$f_{y/x}(y/1)$	$1/2$	$1/2$	0

$E(Y/X=1) = 1/2$

برای $x=2 \Rightarrow f_x(2) = 3/21$

y	0	1	2
$f_{y/x}(y/2)$	1	0	0

$E(Y/X=2) = 0$

Scanned with CamScanner

Subject:

date:

مثال: فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام ذیل باشند. ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x<1 \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = (xy + \tfrac{1}{2}y^2)\Big|_0^1 = x + \tfrac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = (\tfrac{1}{2}x^2 + xy)\Big|_0^1 = y + \tfrac{1}{2}$$

$$E(X) = \int_0^1 x(x+\tfrac{1}{2})\,dx = \int_0^1 (x^2 + \tfrac{1}{2}x)\,dx = (\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2)\Big|_0^1 = \tfrac{7}{12}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y(y+\tfrac{1}{2})\,dy = \int_0^1 (y^2 + \tfrac{1}{2}y)\,dy = (\tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{4}y^2)\Big|_0^1 = \tfrac{7}{12}$$

$$E(X,Y) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^1 (x^2y + xy^2)\,dy\,dx$$

$$\int_0^1 (\tfrac{x^2y^2}{2} + \tfrac{xy^3}{3})\Big|_0^1 dx = \int_0^1 (\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x}{3})\,dx = (\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{6}x^2)\Big|_0^1$$

$$\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = \tfrac{1}{3} - (\tfrac{7}{12} \times \tfrac{7}{12}) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{49}{144}$$

$$Cov(X,Y) = -\tfrac{1}{144}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \tfrac{5}{12} - (\tfrac{7}{12})^2 = \tfrac{11}{144}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(x+\tfrac{1}{2})\,dx = \int_0^1 (x^3 + \tfrac{1}{2}x^2)\,dx = (\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{6}x^3)_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{12}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \tfrac{5}{12} - (\tfrac{7}{12})^2 = \tfrac{11}{144}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2(\tfrac{1}{2}+y)\,dy = \int_0^1 (y^3 + \tfrac{1}{2}y^2)\,dy = (\tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{6}y^3)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{12}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \frac{-\tfrac{1}{144}}{\sqrt{\tfrac{11}{144}\cdot\tfrac{11}{144}}} = \frac{-\tfrac{1}{144}}{\tfrac{11}{144}} = -\tfrac{1}{11}$$

Scanned with CamScanner